[This question paper contains 04 printed pages]

Roll Number: _______________

HPAS (Main) Examination-2018

MATHEMATICS-II

Time: 3 Hours | Maximum Marks: 100

निर्धारित समय : तीन घंटे | अधिकतम अंक: 100

Note:

1. This question paper contains eight questions. Attempt total five questions including question No.1 which is compulsory.

2. Each question carries equal marks. Marks are divided and indicated against each part of the question.

3. Write legibly. Each part of the question must be answered in sequence in the same continuation.

4. If questions are attempted in excess of the prescribed number only questions attempted first up to the prescribed number shall be valued and the remaining answers will be ignored.

ध्यान दें :

1. इस प्रश्न पत्र में आठ प्रश्न हैं। प्रश्न संख्या 1 (जो अनिवार्य है) सहित कुल पांच प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

2. प्रत्येक प्रश्न के समान अंक हैं। अंको को प्रश्न के प्रत्येक भाग के विरुद्ध विभाजित और इंगित किया गया है।

3. स्पष्ट रूप से लिखें। प्रश्न के प्रत्येक भाग को उसी क्रम में क्रम से उत्तर दिया जाना चाहिए।

4. यदि प्रश्नों को निर्धारित संख्या से अधिक करने का प्रयास किया जाता है, तो केवल निर्धारित संख्या तक पहले किए गए प्रश्नों का मूल्यांकन किया जाएगा और शेष उत्तरों को नजरअंदाज किया जाएगा।

HP General Studies

1\. (a) Let X be any non-empty set and S(X) be the set of all bijections of X onto itself. Then prove that (S(X), O) is an abelian group if X be set with one or two elements where O is the operation of composite of functions. (05)

माना कि X अरिक्त समुच्चय है तथा S(X), X से उसी पर परिभाषित सभी एकैकी आच्छादको का समुच्चय है तब सिद्व करो कि (S(X),O) एक क्रमविनिमेय ग्रुप है यदि और केवल यदि X में एक और दो अवयव है जहॉ O एक संयुक्त फलनों की संक्रिया है।

(b) Let (X, d) be a metric space and let $A \subseteq X$ then prove that $\bar{A} = \{x \in X: d(x, A) = 0\}$. (05)

माना कि (X, d) एक दूरीक समष्टि है और $A \subseteq X$ तब सिद्व करो $\bar{A} = \{x \in X: d(x, A) = 0\}$

(c) If $X = \sqrt{-1}$ then find the value of X^X. (05)

यदि $X = \sqrt{-1}$ तब X^X का मान ज्ञात करो ।

(d) Find lim sup and lim inf of the sequence $(-1)^n + \frac{1}{n}$. (05)

अनुक्रम $(-1)^n + \frac{1}{n}$ की lim sup और lim inf को ज्ञात करो ।

2\. (a) Let G be a group and G has two subgroups of order 45 and 75. If $|G| < 400$, then find the $|G|$. (10)

माना कि G एक समूह है तथा G के दो उपसमूहों जिनकी कोटि 45 और 75 है। यदि $|G| < 400$, तब $|G|$ ज्ञात करो।

(b) Let $f: G \to H$ be a group homomorphism with kernel K. If the order of G, H and K are 75, 45 and 15 respectively, then find the order of the image $f(G)$. (10)

माना कि $f: G \to H$ एक समूह समाकारिता है जिसकी अष्टि K है। समूहों G, H और K जिनकी कोटि क्रम"ा:75, 45 और 15 है। तब प्रतिबिम्ब $f(G)$ की कोटि ज्ञात करो।

3\. (a) Determine those values of s for which the improper integral $\int_0^\infty e^{-sx}\,dx$ converges. (10)

s के उन मानों को ज्ञात करो जिसके लिए अनन्त समाकल $\int_0^\infty e^{-sx}\,dx$ अभिसारी है।

(b) Find the value of $L\left\{x^{\frac{7}{2}}\right\}$. (10)

$L\left\{x^{\frac{7}{2}}\right\}$ मान ज्ञात करो।

HP General Studies

4. (a) Obtain the partial differential equation of the set of all right circular cones whose axes coincide with z-axis. (10)

लम्बवृत्तीय शंकुओं जिसकी अक्ष रेखाए z-अक्ष है के समुच्चय के लिए आंिशक अवकल समीकरण को ज्ञात करो ।

(b) Prove that any sufficiently differentiable function of the form F(x + kt) satisfies the wave equation $F_{xx}= (1/k^2)\, F_{tt}$. (10)

सिद्व करो कि पर्याप्त रुप से अवकलनीय फलन रुप F(x + kt) वेव (तंरग) समीकरण $F_{xx}= (1/k^2)\, F_{tt}$ को सतुंष्ट करता है।

5. (a) Let $f(x) = \begin{cases} c, & 0 \le x \le c \\ 2c, & c < x \le 1 \end{cases}$. If $\int_0^1 f(x)dx = \frac{7}{16}$. Find the value of c. (10)

माना कि $(x) = \begin{cases} c, & 0 \le x \le c \\ 2c, & c < x \le 1 \end{cases}$. यदि $\int_0^1 f(x)dx = \frac{7}{16}$. c का मान ज्ञात करो।

(b) Let $f:[0,1] \to$ R be a continuous function. For any partition P of [0, 1] let L(P, f) and U(P, f) denote the lower and upper Darboux' sums respectively. Let P = {0, .01, .02, ………, 1} and Q = {0, .001, .002, ……..1} be two partitions of [0, 1]. Then prove that L(P, f) ≤ L(Q, f) ≤ U(Q, f) ≤ U(P, f). (10)

माना $f:[0,1] \to$ R एक संतत फलन है, [0, 1] के विभाजन P के लिए L(P, f) और U(P, f) कम"ाः निम्न डार्बू योग और उपरि डार्बू योग है। माना P = {0, .01, .02, ………,1} और Q = {0, .001, .002, ……..1}, [0, 1] के दो विभाजन है। सिद्व करो कि L(P, f) ≤ L(Q, f) ≤ U(Q, f) ≤ U(P, f).

(6) (a) Define open sphere in metric space. Describe open sphere with figure of unit radius as a centre co-ordinate (0,0) for the metric $d(z_1, z_2) = \{ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \}^{1/2}$ defined on R^2 where $z_1 = (x_1, y_1)$ and $z_2 = (x_2, y_2)$ are any two points of R^2. (10)

विवृत्त गोला को दूरीक समष्टि में परिभाषित कीजिए तथा दूरीक $d(z_1, z_2) = \{ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \}^{1/2}$ जो कि R^2 पर परिभाषित है के लिए इकाई त्रिज्या के विवृत्त गोला जिसका केन्द्र बिन्दु (0,0) है का सचित्र वर्णन कीजिए। जहॉं $z_1 = (x_1, y_1)$ और $z_2 = (x_2, y_2)$, R^2 के दो बिन्दु हैं।

(b) Define closed sphere in metric space. Describe closed sphere with figure of unit radius as a centre co-ordinate (0,0) for the

HP General Studies

metric $d(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ defined on R^2 where $z_1 = (x_1, y_1)$ and $z_2 = (x_2, y_2)$ are any two points of R^2. (10)

संवृत गोला को दूरीक समष्टि में परिभाषित कीजिए तथा दूरीक $d(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ जो कि R^2 पर परिभाषित है के लिए इकाई त्रिज्या के संवृत गोला जिसका केन्द्र बिन्दु (0,0) है का सचित्र वर्णन कीजिए। जहॉं $z_1 = (x_1, y_1)$ और $z_2 = (x_2, y_2)$, R^2 के दो बिन्दु हैं।

7. (a) Test the convergence of the series $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$. (10)

श्रेणी $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

(b) Test the convergence of the series $\sum_{n=1}^{n=\infty} (1 + \frac{1}{n})^{-n^2}$. (10)

श्रेणी $\sum_{n=1}^{n=\infty} (1 + \frac{1}{n})^{-n^2}$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

8. (a) Write an algorithm and draw a flow chart for integrating $\int_a^b f(x)dx$ by Trapezodial rule taking step size h. (10)

$\int_a^b f(x)dx$ का समाकलन करने के लिए पद की लम्बाई h लेते हुए ट्रेपिजोइडल नियम की कलन विधि लिखिए और प्रवाह संचित्र बनाइए ।

(b) Write an algorithm and draw a flow chart for finding the value of y at x = xn for the differential equation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ taking step size h, when the initial values of x and y are given, by Euler's method. (10)

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ में पद की लम्बाई h लेते हुए y का x = xn पर मान पर निकालने की आयलर विधि की कलन विधि लिखिए और प्रवाह संचित्र बनाइए , जबकी x और y के प्रारम्भिक मान दिए हुए है।

HP General Studies