

2019

MATHEMATICS

गणित

Time Allowed : 3 hours

Maximum Marks : 300

समय : 3 घण्टे

पूर्णांक : 300

Instructions :

- The questions are of equal value.
- Candidates are required to answer **six (06)** questions in all, selecting **three (03)** from each Section.
- Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.
- All questions have been printed both in English and Hindi. In case of any ambiguity in Hindi version, the English version shall be considered authentic.
- Parts of the same question must be answered together and must not be interposed between answers to other questions.

अनुदेश :

- सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।
- उम्मीदवार प्रत्येक खण्ड से तीन-तीन (03) प्रश्नों को चुनते हुए कुल छः (06) प्रश्नों के उत्तर दें।
- परीक्षार्थी यथासम्भव अपने शब्दों में ही उत्तर दें।
- सभी प्रश्न अंग्रेजी और हिन्दी दोनों भाषा में छपे हैं। यदि हिन्दी भाषा में कोई संदेह है, तो अंग्रेजी भाषा को ही प्रामाणिक माना जाएगा।
- एक ही प्रश्न के विभिन्न भागों के उत्तर अनिवार्य रूप से एक साथ ही लिखे जाएँ तथा उनके बीच में अन्य प्रश्नों के उत्तर न लिखे जाएँ।

(2)

SECTION—I

खण्ड—I

1. (a) Let W be a subspace of an n -dimensional vector space V . Then show that $\dim W \leq n$. In particular, if $\dim W = n$, then show that $W = V$.

- (b) Let $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be the linear mapping defined by

$$F(x, y, z, t) = (x - y + z + t, 2x - 2y + 3z + 4t, 3x - 3y + 4z + 5t)$$

Find a basis and dimension of image of F and kernel of map F .

- (क) माना कि W एक n -आयामेयानल वेक्टर स्पेस V का सबस्पेस है। सिद्ध कीजिए कि $\dim W \leq n$ । यदि $\dim W = n$ है, तब सिद्ध कीजिए कि $W = V$ ।

- (ख) माना $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ एक रेखिक प्रतिचित्रण है,

$$F(x, y, z, t) = (x - y + z + t, 2x - 2y + 3z + 4t, 3x - 3y + 4z + 5t)$$

जिसे द्वारा परिभाषित किया गया है। F के इमेज का बेसिस और उसकी विमा तथा प्रतिचित्र F का कर्नेल ज्ञात कीजिए।

(3)

2. (a) Investigate

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y, & (x, y) \neq (1, 2) \\ 0, & (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

for continuity at $(1, 2)$.

- (b) Show that $z = f(x^2 y)$, where f is differentiable, satisfies

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = 2y \frac{\partial z}{\partial y}$$

- (क) $(1, 2)$ पर सन्तुष्ट के लिए

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y, & (x, y) \neq (1, 2) \\ 0, & (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

की जाँच कीजिए।

- (ख) सिद्ध कीजिए कि $z = f(x^2 y)$, जहाँ f अवकलनीय है,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = 2y \frac{\partial z}{\partial y}$$

को संतुष्ट (satisfy) करता है।

3. (a) Show that the integral

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$$

is convergent and hence evaluate it.

(4)

(b) Prove that

$$\iint_R \sqrt{|y-x^2|} dx dy = \frac{3\pi+8}{6}$$

where $R = [-1, 1; 0, 2]$.

(क) सिद्ध कीजिए कि समाकल

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$$

कन्वर्जेंट है तथा इसका मूल्योत्पन्न कीजिए।

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\iint_R \sqrt{|y-x^2|} dx dy = \frac{3\pi+8}{6}$$

जहाँ $R = [-1, 1; 0, 2]$.

4. (a) Solve :

$$6\cos^2 x \left(\frac{dy}{dx} \right) - y \sin x + 2y^4 \sin^3 x = 0$$

(b) Let $F = 2xzi - xj + y^2k$. Evaluate

$$\iiint_V F dV$$

where V is the region bounded by the surfaces $x=0$, $y=0$, $y=6$, $z=x^2$, $z=4$.

09/FE/CC/M-2019-19/41

(Continued)

(5)

(क) हल कीजिए :

$$6\cos^2 x \left(\frac{dy}{dx} \right) - y \sin x + 2y^4 \sin^3 x = 0$$

(ख) माना कि $F = 2xzi - xj + y^2k$. $\iiint_V F dV$ का मूल्योत्पन्न कीजिए, जहाँ V एक क्षेत्र है, जो सतह (surface) $x=0$, $y=0$, $y=6$, $z=x^2$, $z=4$ से घिरा है।

5. (a) The two perpendicular lines

$$7x - 6y + 84 = 0 \quad \dots (1)$$

$$6x + 7y - 42 = 0 \quad \dots (2)$$

being given. Find the equation of the parabola of latus rectum 4 which has (1) for axis and (2) for tangent at vertex and which lies to the origin side of (2).

(b) Show that the area of the triangle formed by lines $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ and $x=0$ is

$$\frac{(c_1 - c_2)^2}{m_2 - m_1}$$

09/FE/CC/M-2019-19/41

(Turn Over)

(6)

(क) दो लम्ब रेखाएँ (perpendicular lines)

$$7x - 6y + 84 = 0 \quad \dots (1)$$

$$6x + 7y - 42 = 0 \quad \dots (2)$$

दिये हुए हैं। उस parabola का समीकरण प्राप्त कीजिए, जिसका लैटस रेक्टम 4 है और (1) एक्सिस है तथा (2) वर्टिस पर टैन्जेंट है तथा वह शून्य साइड (2) पर है।

(ख) सिद्ध कीजिए कि रेखाओं $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ और $x = 0$ से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\frac{(c_1 - c_2)^2}{m_2 - m_1}$$

है।

6. (a) A given force acts along the axis of x and another given force along a generator of the cylinder $x^2 + y^2 = a^2$. Prove that the locus of the central axis is an elliptic cylinder.

(b) When a particle is projected from a point O on a plane of inclination β with a velocity u making an angle α with horizontal, find the range on the plane.

(7)

(क) दिया गया है कि एक बल x के ऐक्सिस के ऊपर लगाया है और दूसरा बल सिलिन्डर $x^2 + y^2 = a^2$ के जेनरेटर पर लगाया गया है। सिद्ध कीजिए कि सेंट्रल ऐक्सिस का लोकस एक इलिप्टिक सिलिन्डर है।

(ख) जब एक बिन्दु O से एक कण उछाला जाता है जिसका प्रारम्भिक कोण O से β है तथा वेग (velocity) u , क्षैतिज (horizontal) से α कोण बनाती है, तो प्लेन का रेंज प्राप्त कीजिए।

SECTION—II

खण्ड—II

7. (a) If H is the only subgroup of finite order m in the group G , then show that H is a normal subgroup of G .

(b) Prove that every ideal of a ring R is a subring of R but the converse need not be true.

(क) यदि H , ग्रुप G का अकेला सबग्रुप है फाइनাইट ऑर्डर m का, तब सिद्ध कीजिए कि H , G का नॉर्मल सबग्रुप है।

(ख) सिद्ध कीजिए कि रिंग R का प्रत्येक आइडियल उसका सबरिंग है, परन्तु इसका विलोम सही हो, आवश्यक नहीं है।

8. (a) It is known that each of the four people A, B, C and D tells the truth in a given instance with probability $\frac{1}{3}$. Suppose that A makes a statement, and then D says that C says that B says that A was telling the truth. What is the probability that A was actually telling the truth?

- (b) For the following sequence of independent random variables, does the WLLN (Weak Law of Large Numbers) hold?

$$P[X_k = \pm\sqrt{k}] = \frac{1}{2}$$

- (क) यह ज्ञात है कि A, B, C और D के सच बोलने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है। मानें कि A कुछ बोलता है, और फिर D कहता है कि C कहता है कि B कहता है कि A ने सच बोला है। फिर A के वास्तविक रूप से सच बोलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

- (ख) निम्न स्वतंत्र यादृच्छिक चरों के क्रम में क्या WLLN (Weak Law of Large Numbers) होगा?

$$P[X_k = \pm\sqrt{k}] = \frac{1}{2}$$

9. (a) Solve graphically the following Linear Programming Problem :

$$\text{Minimize } Z = 5x + 10y$$

subject to

$$x + 2y \leq 120$$

$$x + y \geq 60$$

$$x - 2y \geq 0$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

- (b) Given $y' = x^2 + y^2$ with $x=0, y=1$. Find $y(0.1)$ by fourth-order Runge-Kutta method.

- (क) प्राचीन विधि से निम्न रेखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

$$\text{न्यूनतम मान } Z = 5x + 10y$$

विराक्त प्रतिबंध हैं

$$x + 2y \leq 120$$

$$x + y \geq 60$$

$$x - 2y \geq 0$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

- (ख) रून्गे-कुट्टा विधि के चतुर्थी क्रम के प्रयोग से $y(0.1)$ ज्ञात कीजिए, जब $y' = x^2 + y^2$, जहाँ $x=0, y=1$.

10. (a) Expand

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

in a Laurent's series valid for the region $|z| < 1$.

- (b) Evaluate

$$\int_C \frac{e^{3z}}{z+i}$$

if C is the circle $|z+1+i|=2$.

(10)

- (क) $|z| < 1$ क्षेत्र के लिए निम्न सीमा लैप्लास के नियम से

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

को विस्तारित कीजिए।

- (ख) मान

$$\int_C \frac{e^{2z}}{z+i}$$

जहाँ C वृत्त $|z+1+i|=2$ है।

11. (a) Find the moment of inertia of a solid sphere.

- (b) Find the complete integral of the partial differential equation

$$p^2 q^2 (px + qy - z) = 2$$

- (क) एक ठोस गेंदे का ब्रह्मस्फूर्त ज्ञान कीजिए।

- (ख) निम्न आंशिक अवकल समीकरण का पूर्ण समाकलन ज्ञान कीजिए।

$$p^2 q^2 (px + qy - z) = 2$$

(11)

12. (a) Prove that if f is Riemann integrable on $[a, b]$ and F is the primitive of f on $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

- (b) Separate the intervals in which the function f defined on R by

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

for all $x \in R$ is increasing or decreasing.

- (क) सिद्ध कीजिए

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

जहाँ f , $[a, b]$ पर रिमैन इन्टीग्रेबल है और F , $[a, b]$ पर f का प्रिमिटिव है।

- (ख) उस अंतराल को, जहाँ फंक्शन f को R द्वारा

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

के अन्तर्गत परिभाषित किया गया है, $x \in R$ को इन्क्रीजिंग या डिक्लीजिंग माना जा, ज्ञान कीजिए।

...